

Интегральное исчисление.

Тема 11. Интегрирование

рациональных и тригонометрических функций.

§1.Рациональные функции.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Определение 1. **Рациональной функцией** называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе называются **рациональными дробями**.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$R_2(x) = \frac{x^2 + 9}{x - 1}$$

Пример. $R_1(x) = \frac{x^2 + 3x + 7}{x^4 + 9x^3 + 8}$

$$R_3(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2x - 3}$$

Определение 2. **Рациональная дробь** называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя.

$R_1(x)$ - правильная рациональная дробь.

Определение 3. Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.

$R_2(x), R_3(x)$ - неправильные рациональные дроби.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

Теорема. **Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.**

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}}$$

Пример.

$$\frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 4x + 5 + \frac{4}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 + x - 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 4x^2 + x - 1 \\
 \underline{4x^2 - 4x} \\
 5x - 1 \\
 \underline{5x - 5} \\
 4
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 x - 1 \\
 \hline
 x^2 + 4x + 5
 \end{array} \right.$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует 3 типа элементарных дробей:

1. $\frac{A}{x-a}$ - I тип

2. $\frac{A}{(x-a)^n}$ - II тип

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ - III тип

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

- 1) Если знаменатель содержит различные линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$A - ?$
 $B - ?$
 $C - ?$

- 2) Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3} =$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \frac{C_3}{(x-c)^3} ;$$

$A - ? \quad B_1 - ? \quad B_2 - ?$

$C_1 - ? \quad C_2 - ? \quad C_3 - ?$

- 3) Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)} =$$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{Cx + D}{x^2 + p_2x + q_2}$$

§2. Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

- 1) I типа:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

2) II типа

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

3) III типа ($D < 0$)

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} \right) - \frac{p^2}{4} + q =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= A \int \frac{x}{x^2+px+q} dx + B \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2} A \int \frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q} dx + \\ &+ B \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2} = \frac{1}{2} A \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{p}{2} A \right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} A \ln |x^2 + px + q| + \left(B - \frac{p}{2} A \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \end{aligned}$$

§3. Методы нахождения значений А, В, С...

§3.1 Метод неопределенных коэффициентов

Состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной x.

Простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной функции. Получится система «n» уравнений с «n» неизвестными А, В, С..., которая имеет единственное решение.

Пример.
$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx =$$

Подынтегральную функцию представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = \frac{\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{A}}{x-1} + \frac{\frac{(x^2+2x+2)}{B}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{(x-1)^2}{Cx+D}}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5x + 9 &= A(x^3 - x^2 + 2x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 2) + B(x^2 + 2x + 2) + \\
 &+ (Cx + D)(x^2 - 2x + 1) = \underline{Ax^3} + \underline{Ax^2} - 2A + \underline{Bx^2} + \underline{\underline{2Bx}} + 2B + \underline{Cx^3} - \\
 \underline{\underline{2Cx^2}} + \underline{\underline{Cx}} + \underline{\underline{Dx^2}} - \underline{\underline{2Dx}} + D &= x^3(A + C) + x^2(A + B - 2C + D) + \\
 x(2B + C - 2D) + (-2A + 2B + D)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 x^3 \\
 x^2 \\
 x^1 \\
 x^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 0 = A + C \\
 1 = A + B - 2C + D \\
 -5 = 2B + C - 2D \\
 9 = -2A + 2B + D
 \end{array} \right.$$

Решая эту систему, получим:

$$A = -\frac{7}{5}$$

$$B = 1$$

$$D = \frac{21}{5}$$

$$C = \frac{7}{5}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \frac{-\frac{7}{5}}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{\frac{7}{5}x + \frac{21}{5}}{x^2 + 2x + 2} dx = \\
&= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{5} \int \frac{xdx}{(x^2 + 2x + 2)} + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\
&= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \int \frac{(2x+2) - 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\
&= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{7}{5} \int \frac{dx}{(x+2x+1) - 1 + 2} + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\
&= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10} \ln|x^2 + 2x + 2| + \frac{14}{5} \operatorname{arctg}(x-1) + C
\end{aligned}$$

§3.2 Метод частных значений.

Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида $(x-a)(x-b)(x-c)$, то можно применять метод частных значений для нахождения коэффициентов А, В, С..., придавая х значения $x=a$; $x=b$; $x=c$

Пример.

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$2x^2 + 10x - 18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

$$x=1 \quad \left| \quad -6 = A \cdot 3(-2) \quad A=1 \right.$$

$$x=-2 \quad \left| \quad -30 = B(-3)(-5) \quad B=-2 \right.$$

$$x=3 \quad \left| \quad 30 = C \cdot 2 \cdot 5 \quad C=3 \right.$$

Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Выводы: Если под знаком интеграла стоит рациональная дробь, то:

1. Если подынтегральное выражение - неправильная рациональная дробь, то ее надо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей, для чего определить значения коэффициентов А, В, С...
3. Подынтегральное выражение представить в виде суммы легко интегрируемых функций.

§4. Интегрирование тригонометрических функций.

4.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Рассмотрим интегралы вида: $\int R(\sin x, \cos x) dx$
(R- рациональная функция)

Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональной функции заменой переменной при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$ - универсальная тригонометрическая подстановка.

Основываясь на формулах тригонометрии, имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(9+8 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(\frac{9+9t^2+8-8t^2+2t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{2dt}{t^2+2t+17} = 2 \int \frac{dt}{(t^2+2t+1)-1+17} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+4^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C$$

4.2. Интегралы вида: $\int \sin^n x dx \quad ; \quad \int \cos^n x dx$

Находят с использованием рекуррентных (возвращающихся) формул:

$$\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

$$\int \cos^n x \cdot dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx + \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{4-1}{4} \int \sin^{4-2} x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^{4-1} x = \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x = \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \int \sin^0 x \cdot dx - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \right) - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x + C \end{aligned}$$

4.3. Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$, где

n и m - целые числа, причем **одно** из них **нечетное**.

Интегралы берутся с помощью формул:

$$1. \cos x \cdot dx = d(\sin x)$$

$$2. \sin x \cdot dx = -d(\cos x)$$

$$3. \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$4. \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Пример.

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \cdot dx &= \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx = -\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = \\
&= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = \\
&= -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + 2\int \cos^6 x \cdot d(\cos x) - \int \cos^8 x \cdot d(\cos x) = \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c
\end{aligned}$$

4.4. Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, где **n** и **m** — целые числа, но **оба четные**

Применяются формулы понижения степени:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\
\sin x \cdot \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x
\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \\&= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + c = \\&= \underline{\underline{\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c}}\end{aligned}$$

4.5. Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, где

n и m — целые числа, но отрицательные.

Используется подстановка: $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

Выведем формулы для $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; dx

$$1. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}}$$

$$2. \sin^2 x = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = t^2 \cdot \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}}$$

$$3. \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{t' dt}{1 + t^2} \quad \boxed{dx = \frac{dt}{1 + t^2}}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 16 \cos^2 x}.$$

Пусть:

$$\left| \begin{array}{ll} \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} & t = \operatorname{tg} x \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 16 \cos^2 x} &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2 \left(\frac{t^2}{1+t^2} + 6 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 16 \cdot \frac{1}{1+t^2} \right)} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t^2 + 6t + 9) - 9 - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| + C = \\ &= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C \end{aligned}$$

При помощи этой же подстановки берутся интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

4.6. Интегралы вида: $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$;
 $\int \cos nx \cdot \cos mx dx$; $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$.

При интегрировании функций такого вида используются следующие формулы:

$$1. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$2. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$3. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 11x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(x - 11x) - \cos(x + 11x)) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 10x - \cos 12x) dx = \\ &= \frac{1}{20} \sin 10x - \frac{1}{24} \sin 12x + C \end{aligned}$$

4.7. Интегралы вида: $\int \operatorname{tg}^n x \cdot \sec^{2m} x dx$, где

n и m - целые числа

При решении используются формулы:

$$1. \sec^2 x dx = d(\operatorname{tg} x)$$

$$2. \operatorname{cosec}^2 x dx = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

4.8. Интегралы вида: $\int \operatorname{tg}^{2m-1} x \cdot \sec^m x dx$

Используются формулы:

$$1. \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = d(\sec x)$$

$$2. \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = -d(\operatorname{cosec} x)$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

§5. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

5.1. Тригонометрические подстановки.

$$1) \boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx} \text{ применяется подстановка:}$$

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad ; \quad dx = a \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \quad ; \quad \frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \quad ; \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$2) \boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx} \Rightarrow$$

$$x = a \cdot \sin t \quad ; \quad dx = a \cos t dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sin t \quad ; \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$3) \boxed{\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx}$$

$$x = a \cdot \sec t \quad ; \quad dx = a \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sec t \quad ; \quad t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$$

Замечание: эти подстановки не единственные. В случае (1) можно было обозначить $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$; во (2) - $x = a \cdot \cos t$

Примеры.

1)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\cancel{2} dt}{\cancel{2} t dt \cdot \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t}} = \int \frac{dt \cdot \cancel{\cos t}}{\sin t \cdot \cos \cancel{t} \cdot 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t \cdot \cancel{\cos t} \cdot \cancel{\sec t}} = \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} t \cdot dt = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{2} \right| + C$$

2)

$$\int x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 3 \sin t \\ dx = 3 \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{3} \end{array} \right| = \int 9 \sin^2 t \cdot \sqrt{9-9 \sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 81 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{81}{4} \int 4 \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{81}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{81}{4} \int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{81}{8} \int (1 - \cos 4t) dt =$$

$$= \frac{81}{8} \int dt - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4t d(4t) = \frac{81}{8} t - \frac{81}{32} \sin 4t + C =$$

$$= \frac{81}{8} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{81}{32} \sin \left(4 \arcsin \frac{x}{3} \right) + C$$

3)

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 - 16} dx = \left| \begin{array}{l} x = 4 \sec t \\ dx = 4 \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt \\ t = \operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \end{array} \right| = \int 4 \sec t \cdot \sqrt{16 \sec^2 t - 16} \cdot 4 \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt =$$

$$= 64 \int \sec^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt = 64 \int \operatorname{tg}^2 t d(\operatorname{tg} t) = 64 \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3} + C = \frac{64}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 \left(\operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \right) + C$$

5.2. Интегрирование функций, содержащих дробные степени одного и того же аргумента.

$$\boxed{\int R(x; x^\alpha; x^\beta; \dots x^\gamma) dx}, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma - \text{рациональные дроби}$$

Такие интегралы берутся подстановкой:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t^n \quad ; \quad t = \sqrt[n]{x} \\ dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt \end{array}}, \quad \text{где } n - \text{наименьший общий знаменатель дробей } \alpha, \beta, \gamma.$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt[3]{t^6} \cdot 6t^5 dt}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^6}} = 6 \int \frac{t^2 \cdot t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^7 dt}{t^3(t-1)} = 6 \int \frac{t^4 dt}{t-1} =$$

$$\begin{array}{l|l}
 \alpha = \frac{1}{3}; & \beta = \frac{2}{3}; & \gamma = \frac{1}{2} \\
 n = 6 & & \\
 x = t^6 & & \\
 dx = 6t^5 dt & & \\
 t = \sqrt[6]{x} & &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -\frac{t^4}{t^4 - t^3} \\
 -\frac{t^3 - t^2}{t^3} \\
 -\frac{t^2 - t}{t^2} \\
 -\frac{t - 1}{t} \\
 -\frac{1}{t - 1}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{t - 1}{t^3 + t^2 + t + 1}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C = \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} + 2 \cdot \sqrt[6]{x^3} + 3 \cdot \sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C = \\
 &= \underline{\underline{\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C}}
 \end{aligned}$$

5.3. Интегрирование функций, содержащих дробные степени линейных функций аргумента.

$$\int R \left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\alpha; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\beta; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\gamma \right) dx$$

Используется подстановка:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^n \quad ; \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt$$

$$; \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} ,$$

где **n**- наименьший общий знаменатель дробей α, β, γ .

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} = \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{3} \\ n = 6 \\ x + 2 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x+2} \end{array} \right| \begin{array}{l} - \frac{t^3}{t^3 + t^2} \left| \frac{t+1}{t^2 - t + 1} \right. \\ \quad - \frac{t^2}{-t^2} \\ \quad \quad - \frac{-t^2 - t}{t} \\ \quad \quad \quad - \frac{t+1}{-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\
&= 2\sqrt[6]{(x+2)^3} - 3\sqrt[6]{(x+2)^2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln|\sqrt[6]{x+2} + 1| + C = \\
&= 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln|\sqrt[6]{x+2} + 1| + C
\end{aligned}$$

§6. Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.

$$\boxed{\int R(a^x) dx} \quad ; \quad \boxed{\int R(e^x) dx}$$

Интегралы такого вида берутся подстановкой:

$$\boxed{a^x = t} \quad ; \quad \text{прологарифмируем}$$

$$\ln a^x = \ln t$$

$$x \cdot \ln a = \ln t$$

$$\boxed{x = \frac{\ln t}{\ln a}} \quad ; \quad \boxed{dx = \frac{dt}{t \cdot \ln a}}$$

Пример $\int \frac{3^x dx}{1+9^x} = \int \frac{\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t} \cdot \ln 3 (1+t^2)} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} t + C =$

$$\left. \begin{array}{l} 3^x = t \\ x = \frac{\ln t}{\ln 3} \\ dx = \frac{dt}{t \cdot \ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} 3^x + C$$

§7 Заключительные замечания

1.Нахождение неопределенного интеграла основывается на сведении его к табличному.

Существует специальный справочник по неопределенному интегралу.

2.Если интеграл найден различными способами форма ответов будет разной, но как ранее было доказано, эти ответы отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое.

Например

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = -\int \cos^{-3} x d(\cos x) = -\frac{\cos^2 x}{-2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

Итак

$$F_1(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1, \text{ а } F_2(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2 = \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 - \frac{1\sin^2 x}{2\cos^2 x} - C_2 = \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{2\cos^2 x} + C_1 - C_2 = \\ &= \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x} + C_1 - C_2 = \frac{1}{2} + C_1 - C_2 = C \end{aligned}$$

3.Изложенные методы интегрирования не всегда позволяют находить неопределенный интеграл. Такие интегралы называются неберущимися и их можно вычислить только приближенными методами.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx - \text{интегральный синус}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральный косинус}$$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \text{интеграл Пуассона и т.д.}$$